Adı Soyadı: **16.01.2023**

Numara:

MAT 101 ANALİZ I DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $f(x)=(|x|-x)\sqrt{-\sin^2 \pi x}+\arccos 2^x$ biçiminde verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz (10 puan).

2) $x\in(-1,1)$ olmak üzere $\operatorname{arctanh} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ olduğunu gösteriniz (10 puan).

3) Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}}+\ldots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}$ biçiminde verilen (x_n) dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız (15 puan).

4) Aşağıda verilen limitleri varsa bulunuz (15 puan).

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\cos x+x^2}{\sin x+x^2}$

5) Aşağıda verilen fonksiyonların süreksizlik noktalarını bularak süreksizlik çeşidini belirleyiniz (20 puan).

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 4, & x=1\end{cases}$ **b)** $f(x)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2}$

6) Reel sayılar kümesinde tanımlı ve tanım kümesindeki her noktada süreksiz olan bir fonksiyon örneği veriniz (10 puan).

7) A kümesi $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz (10 puan).

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)\tan(\pi\cos^2 x)+x^3}{x^2\ln(x+1)}$ limitini varsa bulunuz (10 puan).

Not: Yukarıdaki sorularda karşılaşılan belirsizliklerde L'Hopital kuralını kullanmayınız. 4. sorudaki her şık 5 puan ve 5. sorudaki her şık 10 puandır. Süre 110 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

ANALİZ - I DERSİ FİNAL SINAVI
CEVAP ANAHTARI

1) $f_1(x) = |x| - x$, $f_2(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ ve $f_3(x) = \arccos 2^x$

denirse $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) + f_3(x)$ olur.

$D_{f_1} = \mathbb{R}$ dir. $f_2(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ için $-\sin^2 \pi x \geq 0 \iff \sin^2 \pi x \leq 0$

olup $\sin^2 \pi x = 0$ olur. Böylece

$$\sin \pi x = 0 \implies \pi x = 0 + 2k\pi \vee \pi x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\implies x = 2k \vee x = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\implies x = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olup $D_{f_2} = \mathbb{Z}$ dir. Son olarak $f_3(x) = \arccos 2^x$ için

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ ve $\forall x$ için $2^x > 0$ olduğundan

$0 < 2^x \leq 1 \implies -\infty < x \leq 0$ olup $D_{f_3} = (-\infty, 0]$

bulunur. O halde

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0] = \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0] = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

elde edilir.

2) $x \in (-1, 1)$ olmak üzere $\operatorname{arctanh} x = y \iff x = \tanh y \quad \ldots (1)$

olur. Buradan

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \implies e^y - e^{-y} = x e^y + x e^{-y}$$
$$\implies \frac{e^{2y} - 1}{e^y} = x e^y + x e^{-y}$$
$$\implies e^{2y} - 1 = x e^{2y} + x$$
$$\implies e^{2y} - x e^{2y} = x + 1$$
$$\implies e^{2y}(1 - x) = x + 1$$
$$\implies e^{2y} = \frac{x+1}{1-x}$$
$$\implies 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$\implies y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

olup (1) den

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

bulunur

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}+\dots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} < x_n < \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\dots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{n^3}{\sqrt{n^6+n}} < x_n < \frac{n^3}{\sqrt{n^6+1}}$$

olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{n^3}{\sqrt{n^6+n}}$ ve $b_n = \frac{n^3}{\sqrt{n^6+1}}$ olacak şekilde

(a_n) ve (b_n) dizilerini alalım. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = 1$$

bulunur. O halde sıkıştırma teoremi gereği

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

olup (x_n) dizisi yakınsaktır.

4)

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} \to \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\left(\sqrt{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

olur. $a=0$ son limit için kritik nokta olduğundan sağ ve sol limit bakılır.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\sin x}\sqrt{1+\cos x}}{\cancel{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{-\sin x} = -\lim_{x\to 0^-} \sqrt{1+\cos x} = -\sqrt{2}$$

olup $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$

olduğundan $a=0$ da limit yoktur.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} \to \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y$ olup $x \to 0$ iken $y \to 0$ olup

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

bulunur.

c) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos x + x^2}{\sin x + x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{\cos x}{x^2}+1\right)}{x^2\left(\frac{\sin x}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\cos x}{x^2}+1}{\frac{\sin x}{x^2}+1}$$

olur. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

olur. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = -\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi gereği

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$ olup

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos x + x^2}{\sin x + x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\cos x}{x^2}+1}{\frac{\sin x}{x^2}+1} = 1$$

bulunur.

5) a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ olduğundan $a = -1$ de f süreksizdir.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = +\infty$$

olduğundan f, $a=-1$ noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

olup $f(1) = 4$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ olur.

f, $a=1$ de süreksizdir. Bu $a=1$ noktası kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

b) f nin tanımlı olması için $x^3-x^2 \neq 0$ olmalıdır.

$x^3-x^2=0 \iff x^2(x-1)=0 \iff x=1,\ x=0$ olup

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ dir. O halde f, 0 ve 1 de süreksizdir.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^3-x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^2(x-1)} = -\infty$$

olduğundan 0 da sonsuz süreksizlik vardır.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x^2(x-1)} \to \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

$x-1=u \iff x=u+1$ denirse $x\to 1$ iken $u\to 0$ olup

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}u+\frac{\pi}{2})}{u(u+1)^2}$$

$$= -\lim_{u\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{2}u}{u}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\cdot \lim_{u\to 0}\frac{1}{1+u^2}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}\cdot 1$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

olduğundan $a=1$ noktası f nin kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

6) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini belirtmek üzere

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

fonksiyonunun hiçbir noktada limiti yoktur. O halde f $\mathbb{R}$ deki her noktada süreksizdir.

7) $A\neq\emptyset$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlasın. O halde $\forall x,y\in A$ için

$$|f(x)-f(y)| \leq M.|x-y| \quad \dots (1)$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Böylece $\forall \varepsilon>0$ sayısı ve $\forall x,y\in A$ için

$$|x-y|<\delta$$

iken (1) den

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y| < \delta . M$$

olup $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ alınırsa

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

olur. O halde f düzgün süreklidir.

8) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)\tan(\pi\cos^2 x)+x^3}{x^2\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\cos^2 x)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}$

olur. Burada $\displaystyle \lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u} = 1 = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}$ ve $\displaystyle \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = 1$

özel limitleri kullandım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\cos^2 x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi(1-\sin^2 x))}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi-\pi\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)}{\pi\sin^2 x} . \pi . \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= -\pi \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)}{\pi\sin^2 x}$$

olup $u=\pi\sin^2 x$ denirse $x\to 0$ iken $u\to 0$ olup

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\cos^2 x)}{x^2} = -\pi\lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u} = -\pi$$

bulunur. Ayrıca $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = 1$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)\tan(\pi\cos^2 x)+x^3}{x^2\ln(x+1)} = -\pi+1$$

elde edilir.